JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 43, 81–89 (1985)

Problème inverse du lieu des meilleures approximations linéaires

PHAM DINH TAO

Laboratoire IMAG, Tour des Mathématiques, Analyse Numérique, BP N° 68, 38402 Saint Martin d'Hères Cédex, France

Communicated by Allan Pinkus

Received November 4, 1983

Soit E un espace vectoriel normé, V un sous espace vectoriel de E, de dimension finie n et f un élément de $E, f \notin V$. On dit que $\bar{g} \in V$ est meilleure approximation de f dans V si $\|f-\bar{g}\| = \mathrm{Inf}\{\|f-g\|, g \in V\}$. Il est bien connu (P. J. Laurent, "Approximation et optimization," Hermann, Paris, 1972; I. Singer, "Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970) que l'ensemble $\mathscr{L}(f, V)$ des meilleures approximations de f dans V est une partie compacte convexe non vide de V. Soit alors $f_1, ..., f_n$ une base de V, il est clair que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par $\phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n + x_{n+1} f\|$ est une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$, et que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i \in \mathscr{L}(f, V)$ si et seulement si $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in K(f_i, f)$ où $K(f_i, f) = \{\bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n) \in \mathbb{R}^n,\ \phi(\bar{y}, -1) = \mathrm{Inf}_{y \in \mathbb{R}^n} \phi(y, -1)\}$ est l'ensemble des meilleures approximations de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ au sens de la norme ϕ (e_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$). Ce papier est consacré à la démonstration de ce résultat important: Pour toute partie compacte convexe non vide K de $\mathbb{R}^n$, il existe dans $C([a, b], \mathbb{R})$ (l'espace de Banach des fonctions numériques continues définies sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$), ou plus généralement dans un espace normé universel, $n+1$ vecteurs linéairement indépendants $f_1, ..., f_n, f$ tels que $K(f_i, f)$ soit exactement K.

I. INTRODUCTION

Très souvent dans la pratique la recherche d'un élément $\bar{g} \in \mathscr{L}(f, V)$ passe par la détermination d'un élément $\bar{x} \in K(f_i, f)$ [9–11, 37, 38]. La norme ϕ de $\mathbb{R}^{n+1}$ ainsi définie est dite générée par la norme de E. On établit alors un isomorphisme isométrique entre $V \oplus \mathbb{R}f$ (la somme directe de V et du sous espace vectoriel engendré par f), muni de la norme induite, et $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme ϕ.

De cette manière, l'étude de la structure de l'ensemble $\mathscr{L}(f, V)$ se ramène à l'étude de la structure de $K(f_i, f)$. Avant nos travaux, très peu de choses ont été connues sur la structure de ces ensembles, à part des conditions suffisantes portant sur E ou V pour qu'il ait unicité de $\bar{g}$ [12, 38, 50]. De par

0021-9045/85 $3.00

ses nombreuses et diverses applications en analyse fonctionnelle et particulièrement en analyse numérique, le cas de $C([a, b], \mathbb{R})$ revêt une importance exceptionnelle, surtout dans les problèmes d'approximation linéaire dont la connaissance de la structure de $\mathscr{L}(f, V)$ en faciliterait de beaucoup la résolution. Ce travail est composé de deux parties. La première est consacrée à l'étude de la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces de Banach E (il est clair qu'une norme ϕ de $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme de E si l'espace de Banach $(\mathbb{R}^n, \phi)$ est isométriquement isomorphe à un sous espace vectoriel de E). On y met l'accent particulier sur le cas des espaces fonctionnels usuels $L^p(X, \mu)$, $C(S, F)$ (S étant un espace métrique compact et F un espace de Banach), des espaces de Banach $L(E, F)$ des applications linéaires continues et des espaces de Hilbert.

En général pour un espace de Banach E donné, il est très difficile de dire si une norme ϕ de $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme de E car très souvent pour répondre à cette sorte de questions on doit avoir recours à la théorie constructive des fonctions; i.e., donner des conditions suffisantes portant sur $\{f_1,..., f_n\}$ pour que

$$\phi(x_1,..., x_n) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|, \qquad \forall (x_1,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et puis montrer l'existence de tels (f_i) par leur construction.

Après avoir présenté des résultats relatifs à des normes simples de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de ces espaces de Banach usuels, nous donnons la caractérisation complète de la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme hilbertienne et par la norme de convergence uniforme sur $[a, b]$ de l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$.

Dans le cas de $C([a, b], \mathbb{R})$, on peut démontrer directement le résultat suivant, en utilisant la caractérisation des espaces de Péano (i.e., les espaces métriques compacts, connexes et localement connexes) [18, 24, 54]:

La norme de $C([a, b], \mathbb{R})$ génère toutes les normes de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat primordial peut aussi être déduit de l'universalité de $C([a, b], \mathbb{R})$, (un espace métrique E séparable est dit universel si tout espace métrique séparable est isométrique à un sous espace de E) [15, 39].

Sauf si E est un espace de Hilbert, la norme de l'espace dual E' ne génère pas nécessairement la norme duale ϕ^* de ϕ qui est générée par le norme de E. On peut cependant établir une condition suffisante pour que cette propriété soit vérifiée. Tenant compte du travail de Kakutani [31], ce résultat nous offre en même temps une caractérisation des espaces hilbertiens.

L'étude de la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces de Banach (dont nous donnons un résumé succint ci-dessus) fait partie de nos travaux précédents [43, 44]. Cette étude, qui est assez longue, n'est pas incluse dans notre présent papier (la deuxième partie), qui est consacré à la démonstration de ce résultat primordial:

Pour toute partie compacte convexe non vide K de $\mathbb{R}^n$, il existe une norme ϕ de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que K représente exactement l'ensemble des meilleures approximations linéaires de e_{n+1} dans

$$\mathbb{R}^n\colon K = \mathscr{L}(e_{n+1}, \mathbb{R}^n).$$

Notre démonstration se fait par la construction d'une telle norme ϕ.

Les résultats de la première partie permettent alors d'obtenir la conclusion principale suivante:

Pour toute partie compacte convexe non vide K de $\mathbb{R}^n$, il existe $n+1$ vecteurs $\{f_1, ..., f_n, f\}$ linéairement indépendants dans $C([a, b], \mathbb{R})$ ou plus généralement dans un espace normé universel, tels que

$$K(f_i, f) = K.$$

Nous avons ainsi résolu le problème inverse du lieu des meilleures approximations linéaires.

II. Problème inverse du lieu des meilleures approximations linéaires

1. *Position du problème*

Soit K une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, existe-t-il un espace de Banach E dans lequel on puisse trouver $n+1$ éléments linéairement indépendants $f_1, ..., f_n, f$ tels que $g^* = \sum_{i=1}^n k_i f_i$ est meilleure approximation de f dans V—sous-espace vectoriel engendré par $f_1, ..., f_n$—si et seulement si $k = (k_i) \in K$.

Autrement dit dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme ϕ générée par la norme de E:

$$\phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n + x_{n+1} f\|,$$

on a

$$K = K(f_i, f).$$

2. *Résolution du problème*

On va commencer par démontrer géométriquement l'existence d'une norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que l'ensemble des meilleures approximations de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$, au sens de la norme Ψ, est exactement K.

Pour cela soit a un point de K, on note V_m le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la partie $K - a$ (la translatée de K) dont la dimension est m ($m \leqslant n$), m est aussi la dimension de la partie convexe K.

Soit (ε_i), $i=1,\dots,n$, une base de $\mathbb{R}^n$ telle que les m premiers $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ forment une base de V_m.

Soit e_{n+1} le $(n+1)^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique (e_i), $(i=1,\dots,n+1)$, de $\mathbb{R}^{n+1}$ et K' la transformée de K par la symétrie par rapport au point e_{n+1}:

$$K'=2e_{n+1}-K.$$

Il est clair que K' est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dans l'hyperplan $H=\mathbb{R}^n+e_{n+1}$, soit Γ la réunion des segments $[b_i, b_i]$ $(i=m+1,\dots,n)$, symétriques par rapport à e_{n+1}:

$$e_{n+1}=(b_i+b_i')/2$$

et parallèles aux vecteurs (ε_i) $(i=m+1,\dots,n)$,

$$b_i=e_{n+1}+\lambda_i\varepsilon_i, \qquad i=m+1,\dots,n \ (\lambda_i\in\mathbb{R}, \lambda_i\neq 0).$$

Γ est évidemment compact comme réunion finie de compacts $[b_i, b_i']$. On note C l'enveloppe convexe de la réunion $K\cup K'\cup\Gamma$.

PROPOSITION 1. *La partie convexe C ainsi construite possède les propriétés suivantes*:

(i) *C est symétrique par rapport à e_{n+1}.*

(ii) *L'intérieur $\mathring{C}$ de C est non vide et $e_{n+1}\in\mathring{C}$.*

(iii) *L'hyperplan $H_0=\{x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1}=0\}$ que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^n$, est d'appui de C et que*

$$\mathbb{R}^n\cap C=K.$$

(iv) *C est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Remarque. On suppose toujours l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ normé pour pouvoir parler des notions topologiques comme $\mathring{C}$, compacité de C.

Vérification. (i) C est symétrique par rapport à e_{n+1} car la partie $K\cup K'\cup\Gamma$ l'est.

(ii) L'intérieur de C est non vide car $\dim(C)=n+1$ et $e_{n+1}\in\mathring{C}$ car e_{n+1} est le centre de symétrie de C [3, 6, 33, 46, 51].

(iii) Le demi-espace fermé défini par $\{x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}), x_{n+1}\geqslant 0\}$ contient $K\cup K'\cup\Gamma$, donc contient son enveloppe convexe C.

H_0 est par suite un hyperplan d'appui de C.

Soit Λ l'enveloppe convexe de la réunion $\Gamma\cup K'$. Λ est contenu dans le demi-espace fermé $\{x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1}\geqslant 1\}$ et que H est un hyperplan d'appui de Λ. Il est clair que C est aussi l'enveloppe convexe de $\Lambda \cup K$ par suite, puisque Λ et K sont deux parties convexes, on peut écrire

$$\begin{aligned} C &= \{x = \lambda\mu + \mu v;\, \lambda, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu = 1 \text{ et } u \in \Lambda, v \in K\} \\ &= \bigcup \{[u, v], (u, v) \in \Lambda \times K\}. \end{aligned}$$

D'où

$$C \cap \mathbb{R}^n = \bigcup \{[u, v] \cap \mathbb{R}^n, (u, v) \in \Lambda \times K\}.$$

Or pour tout couple $(u, v) \in \Lambda \times K$, $[u, v] \cap \mathbb{R}^n = \{v\}$ car le sous espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ne rencontre pas le demi-espace fermé $\{x = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} \geqslant 1\}$, par conséquent

$$C \cap \mathbb{R}^n = K.$$

(iv) La réunion $K \cup K' \cup \Gamma$ est compacte, il en est de même pour son enveloppe convexe C [3, 6, 15, 33, 46, 51].

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte convexe non vide K de $\mathbb{R}^n$, il existe une norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que l'ensemble des meilleures approximations de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$, au sens de la norme Ψ, est exactement K.*

Vérification. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1. En effet, soit $C_0 = C - e_{n+1}$; d'après la proposition 1, C_0 est une partie compacte convexe d'intérieur non vide ($\dim C_0 = n+1$), symétrique par rapport à l'origine.

Par suite la jauge Ψ de C_0 définie par [3, 6, 15, 33]

$$\Psi(x) = \inf\{\rho \geqslant 0, x \in \rho C_0\}$$

est bien une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $C_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \Psi(x) \leqslant 1\}$. Il est alors clair que, dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ, l'ensemble des meilleures approximations de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ est exactement K.

Remarque. De par sa construction même, on voit qu'une telle norme Ψ n'est pas unique. Dans [43, 44], l'auteur a étudié diverses constructions simples de Ψ pour certaines formes particulières de K. La proposition 2 permet d'obtenir le résultat suivant qui constitue la résolution du problème inverse du lieu des meilleures approximations linéaires:

PROPOSITION 3. *Pour toute partie compacte convexe non vide K de $\mathbb{R}^n$, il existe dans l'espace de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$ ou plus généralement dans un espace normé universel quelconque E, $n+1$ vecteurs linéairement indépen-*

dants $f_1,\dots,f_n$, f tels que $g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ est meilleure approximation de f dans V (V étant le sous espace vectoriel engendré par $f_1,\dots,f_n$), si et seulement si $k = (k_i) \in K$. Autrement dit $K = K(f_i, f)$.

Vérification. L'espace normé E est universel, il existe alors dans E, $n+1$ vecteurs linéairement indépendants $f_1,\dots,f_n$, f tels que

$$\Psi(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n + x_{n+1} f_{n+1}\|.$$

Ψ étant une norme dans la proposition 2. La démonstration de la proposition 3 est par suite immédiate.

III. Détermination des (f_i) dans $C([a,b],\mathbb{R}^n)$

Avec la résolution du problème inverse du lieu des meilleures approximations linéaires, on s'intéresse évidemment, pour des raisons à la fois pratiques et théoriques, à la détermination des $f_1,\dots,f_n$, f dans $C([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant la proposition 3.

Autrement dit pour toute norme ϕ de $\mathbb{R}^n$, on cherche à expliciter les $f_1,\dots,f_n$ dans $C([a,b],\mathbb{R})$ tels que

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|, \qquad \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Cette propriété est équivalente à

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|, \qquad \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in S(\phi) \qquad (*)$$

en notant $S(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 1\}$, la frontière de la boule unité $U(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) \leqslant 1\}$ de la norme ϕ.

Ce problème fait partie du travail de notre première partie [43, 44]. Nous y avons démontré que $f_1,\dots,f_n$ dans $C([a,b],\mathbb{R})$ vérifie la proriété $(*)$ si et seulement si

$$\operatorname{Exp}(\phi^*) \subset \Gamma \subset U(\phi^*)$$

où ϕ^* est la norme duale de la norme ϕ et $\operatorname{Exp}(\phi^*)$ désigne l'ensemble des points exposés de $U(\phi^*)$ [3, 6, 33, 46, 51].

Soit θ l'application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\theta(t) = (f_1(t),\dots,f_n(t)).$$

L'ensemble Γ désigne ainsi la réunion $\theta([a,b]) \cup (-\theta([a,b]))$.

Il est clair que Γ est une partie compacte, par suite si Γ contient $\operatorname{Exp}(\phi^*)$, alors l'ensemble $\operatorname{Ext}(\phi^*)$ des points extrémaux de $U(\phi^*)$ est nécessairement contenu dans Γ [3, 6, 46, 51]. De plus si la norme ϕ^* est strictement convexe (ce qui est équivalent à la différentiabilité de la norme ϕ [15, 33, 46]), alors

$$\operatorname{Exp}(\phi^*) = \operatorname{Ext}(\phi^*) = S(\phi^*).$$

Dans ce cas les inclusions précédentes deviennent

$$S(\phi^*) \subset \Gamma \subset U(\phi^*).$$

On peut donc regarder le problème de détermination des (f_i) dans $C([a, b], \mathbb{R})$ comme un cas particulier de l'étude générale des représentations paramétriques des espaces de Péano (i.e., des espaces métriques compacts, connexes et localement connexes qui sont caractérisés comme l'image continue de $[a, b]$) [18, 24, 54].

Cette étude importante est au carrefour de la théorie de l'ensemble, la topologie générale, la topologie algébrique et de la théorie constructive des fonctions.

Dans [43, 44], nous avons pu expliciter les $f_1, ..., f_n$ dans $C([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\theta([a, b]) = S(\phi_2)$ ou $\theta([a, b]) = S(\phi_\infty)$, les ϕ_p désignent les normes de Hölder d'ordre p sur $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_p(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right]^{1/p}.$$

Pour le cas de la norme ϕ_2 les expressions explicites des f_i sont obtenues à l'aide de l'ensemble triadique de Cantor et de la représentation en système binaire des nombres de [0, 1]. Dans le cas de la norme ϕ_∞, les expressions explicites des f_i sont obtenues à l'aide du résultat de Kiyoshi Iseki qui est basé sur les développements binaires et ternaires des nombres de [0, 1].

Il est clair que la connaissance d'une représentation paramétrique de $S(\phi)$ permet de déterminer une représentation paramétrique de $S(\Psi)$, avec Ψ une norme quelconque; car les frontières de la boule unité d'une norme sont deux à deux homéomorphes. Cependant il est toujours intéressant, pour des raisons pratiques, d'obtenir des expressions simples de telles f_i. C'est un problème très important qui reste encore ouvert.

REFERENCES

1. N. BOURBAKI, "Eléments de mathématiques," Livre III, "Topologie générale," Chaps. 5, 8, Hermann, Paris, 1963.
2. N. BOURBAKI, "Eléments de mathématiques. Topologie générale," Chaps. 1, 2, Hermann, Paris, 1965.
3. N. BOURBAKI, "Eléments de mathématiques," Fasc. XVIII, Livre V, "Espaces vectoriels topologiques," Chaps. 3–5, Hermann, Paris, 1967.

4. N. Bourbaki, "Eléments de mathématiques," Livre VI, "Intégration," Chaps. 1–4, Hermann, Paris, 1965.
5. N. Bourbaki, "Eléments de mathématiques. Intégration," Chap. 5, Hermann, Paris, 1965.
6. N. Bourbaki, "Eléments de mathématiques," Fasc. XV, "Espaces vectoriels topologiques," Chaps. 1, 2, Hermann, Paris, 1967.
7. B. Brosowski, Über Tschebycheffsche approximationen mit linearen Nebenbedingungen, *Math. Z.* **88** (1965), 105–128.
8. B. Brosowski et R. Wegmann, Charakterisierung bester approximationen in normierten vektorräumen, *J. Approx. Theory* **3**, No. 4 (1970), 369–397.
9. C. Carasso, Sur la convergence de l'algorithme de Rémès–Laurent en l'absence de la condition de Haar, Séminaire d'analyse numérique, IMAG, 1971–1972.
10. C. Carasso, Etude de l'algorithme de Rémès en l'absence de condition de Haar, *Numer. Math.* **20** (1972), 165–178.
11. C. Carasso, "L'algorithme d'échange en optimisation convexe," Thése d'Etat, IMAG, 1973.
12. W. Cheney, "Introduction to Approximation Theory," McGraw–Hill, New York, 1960.
13. G. Choquet, Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés, *Rev. Math. Pures Appl. (Bucarest)* **8** (1963), 541–542.
14. G. Choquet, "Cours d'analyse," Tome II, "Topologie," Masson, Paris, 1964.
15. M. Day, "Normed Linear Spaces," Springer-Verlag, New York, 1962.
16. J. Dieudonné, "Eléments d'analyse," Tome I, "Fondements de l'analyse moderne," Gauthier–Villars, Paris, 1968.
17. J. Dieudonné, "Eléments d'analyse," Tome II, Gauthier–Villars, Paris, 1968.
18. J. Dugundji, "Topology," Allyn & Bacon, Boston, 1966.
19. H. Eggleston, "Convexity," Cambridge Univ. Press, London/New York, 1963.
20. M. Fréchet, Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, *Ann. of Math. (2)* **36** (1935), 705–718.
21. C. Godbillon, "Eléments de topologie algébrique," Hermann, Paris, 1971.
22. A. Goldstein, "Constructive Real Analysis," Harper & Row, New York, 1967.
23. E. Goldstein, A general formulation of the best approximation problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **144**, (1962), 21–22.
24. F. Hausdorff, "Set Theory," Chelsea, New York, 1957.
25. E. Hewitt and K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis," Springer-Verlag, New York, 1965.
26. K. Isedi, An approximation problem in quasi-normed space, *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci.* **35** (1959), 465–466.
27. K. Iseki, Simple construction of generalized Peano curve, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.* Part I, **1**, 1–2 (1949).
28. R. James, Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.* **12** (1945).
29. R. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **61** (1947).
30. R. James, Inner products in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1947).
31. S. Kakutani, Some characterizations of Euclidean spaces, *Japan. J. Math. (N.S.)* **16** (1939).
32. H. Kantorovitch and G. P. Akilov, "Functional Analysis in Normed Spaces," Pergamon, Elmsford, N.Y., 1964.
33. G. Kothe, "Topological Vector Spaces I," Springer-Verlag, New York, 1969.
34. H. Kowalsky, "Topological Spaces," Academic Press, New York, 1957.
35. B. Kripke, Best approximation with respect to nearby norms, *Numer. Math.* **6** (1964), 103–105.
36. K. Kuratowski, "Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie," Dunod, Paris, 1966.

37. P. J. LAURENT, Cours de théorie de l'approximation, Fasc. 3, Université de Grenoble, IMAG, 1968.
38. P. J. LAURENT, "Approximation et optimisation," Hermann, Paris, 1972.
39. L. LIUSTERNIK AND V. SOBOLEV, "Elements of Functional Analysis," Ungar, New York, 1961.
40. A. MARKOV, On mean values and exterior densities, *Mat. Sb. (N.S.)* **4** (1938), 165–191. [English]
41. G. MEINARDUS, "Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
42. I. NATANSON, "Theory of Functions of a Real Variable," Vol. I, Ungar, New York, 1964.
43. P. DINH TAO, Classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces de Banach. Applications, Séminaires d'analyse numérique, IMAG, 1972.
44. P. DINH TAO, "Etude d'une classe de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach. Applications," Thèse, IMAG Université de Grenoble, 1972.
45. J. R. RICE, "The Approximation of Functions," Vols. 1, 2, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1964, 1969.
46. R. T. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis," Princeton, N.J., 1970.
47. I. J. SCHONBERG, On the Péano curve of Lebesgue, *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** (1938).
48. H. S. SHAPIRO, "Topics in Approximation Theory," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
49. W. SIERPINSKI, "Cardinal and Ordinal Numbers," Monografie Matematyczne, Warsawa–Wroclaw, 1965.
50. I. SINGER, "Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
51. F. A. VALENTINE, "Convex Sets," McGraw–Hill, New York, 1964.
52. L. WAELBROECK, "Topological Vector Spaces and Algebras," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
53. G. A. WATSON, "Approximation Theory and Numerical Methods," Wiley, New York, 1980.
54. G. S. YOUNG AND J. G. HOCKING, "Topology," Addison–Wesley, Reading, Mass., 1961.